CAPEXOS

Chapitre D4 - Correction

Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse et du vecteur accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation

CAPEXO 1. Le satellite Hubble est un télescope spatial en orbite circulaire autour de la Terre. Depuis son lancement en 1990, il a permis de faire de nombreuses découvertes et d'améliorer notre connaissance de l'Univers. Ce satellite est placé à une altitude de 570km. On donne le rayon de la Terre $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km, ainsi que la masse de la Terre $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$kg et la masse de Hubble $M_H = 1{,}17 \times 10^4$ kg. Exprimer puis calculer la vitesse de Hubble dans le référentiel géocentrique.

D'après la 2e loi de Newton (système Hubble, référentiel géocentrique)

$M_H \frac{v^2}{R_T+h} = \frac{G M_T M_H}{(R_T+h)^2}$ où h est l'altitude. donc $v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T+h}}$

AN : $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^6 + 570\times10^3}} = 7{,}58 \text{ km.s}^{-1}$

CAPEXO 2. On considère le mouvement de la Terre comme un mouvement circulaire. On donne la masse du Soleil : $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg, la distance moyenne Terre-Soleil : $D = 149{,}6 \times 10^6$ km. Montrer que le mouvement est uniforme et calculer la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique.

$v = \sqrt{\frac{G M_S}{D}}$ (cf ci-dessus)

AN : $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 1{,}99\times10^{30}}{149{,}6\times10^9}}$

$v = 29{,}8 \text{ km.s}^{-1}$

CAPEXO 3. La Lune est l'unique satellite de la Terre. Son orbite peut être considérée comme circulaire et sa vitesse de rotation autour de la Terre comme constante. On donne le rayon de l'orbite lunaire $R = 3{,}84 \times 10^5$ km, la vitesse de la Lune : $v_L = 1{,}02 \times 10^3$ m/s. En déduire la masse de la Terre.

La 2e loi de Newton donne $m \frac{v^2}{R} = \frac{G M_T m}{R^2}$ où m est la masse de la lune

donc $M_T = \frac{R v^2}{G}$

AN : $M_T = \frac{3{,}84\times10^8 \times (1{,}02\times10^3)^2}{6{,}67\times10^{-11}}$

$= 5{,}99\times10^{24}$ kg.

CAPEXO 4. Mars a plusieurs satellites, dont Phobos. On suppose que Phobos a une trajectoire circulaire autour de Mars. Sachant que la masse de Mars est de $6{,}42 \times 10^{23}$ kg et que Phobos a une trajectoire de rayon $R = 9{,}38 \times 10^3$ km, calculer la valeur de la vitesse de Phobos dans le référentiel "marsocentrique".

$v = \sqrt{\frac{G M_{Mars}}{R}}$

AN : $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 6{,}42\times10^{23}}{9{,}38\times10^6}} = 2{,}14\times10^3 \text{ m.s}^{-1}$

CAPEXO 5. La vitesse d'un satellite dépend-t-elle de sa masse ? Justifier à l'aide de la 2e loi de Newton.

La 2e loi de Newton permet d'écrire $\cancel{m}\vec{a} = -\frac{G\cancel{m}M}{R^2}\vec{u}$

donc $\vec{a}$ est indépendant de m. Donc la vitesse également.

(où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire allant de l'astre attracteur au satellite)

CAPEXO 6. Pourquoi tous les satellites géostationnaires situés à une même altitude ne peuvent-ils jamais entrer en collision ?

La vitesse ne dépend que de la masse de l'objet attracteur et de la distance à cet objet donc sur une même orbite, tous les satellites ont la même vitesse.

CAPEXO 7. Les satellites géostationnaires sont situés à une altitude approximative de 36 x 10^3 km. On donne la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg. Calculer leur vitesse dans le référentiel géocentrique.

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

h : altitude.

AN : $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6{,}37\times10^{6}+36\times10^{6}}}$

$v = 3{,}07\times10^{3}$ m.s^{-1}

CAPEXO 8. Canon de Newton :

« Ainsi, si un boulet de canon était tiré horizontalement du haut d'une montagne, avec une vitesse capable de lui faire parcourir un espace de deux lieues avant de retomber sur la terre : avec une vitesse double, il n'y retomberait qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues, et avec une vitesse décuple, il irait dix fois plus loin (pourvu qu'on ait point d'égard à la résistance de l'air), et en augmentant la vitesse de ce corps, on augmenterait à volonté le chemin qu'il parcourrait avant de retomber sur la terre, et on diminuerait la courbure de la ligne qu'il décrirait ; en sorte qu'il pourrait ne retomber sur la terre qu'à la distance de 10, de 30, ou de 90 degrés ; ou qu'enfin il pourrait circuler autour, sans y retomber jamais, et même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel »

Isaac Newton, *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*

En raisonnant sur la plus haute montagne du globe terrestre (Mont Everest à 8848 m d'altitude), pour quelle vitesse aurait-on « il pourrait circuler autour, sans y retomber jamais » ?

On donne le rayon de la Terre R_T = 6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

Il faudrait lancer à une vitesse telle que

$$v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

AN : $v = 7{,}91\times10^{3}$ m.s^{-1}

Démontrer que si la trajectoire d'un satellite est circulaire alors le mouvement est uniforme

CAPEXO 9. Démontrer, en utilisant la 2ème loi de Kepler, que, dans le cas d'un mouvement circulaire, la vitesse d'une planète / d'un satellite est uniforme

Selon la 2e loi de Kepler, les aires balayées par le segment joignant l'attracteur et le satellite pendant une durée donnée sont égales. Ainsi, sur le schéma ci-contre les distances AB et CD parcourues pendant Δt sont égales : le mouvement est uniforme.

CAPEXO 10. Démontrer, en utilisant la deuxième loi de Newton et l'expression du vecteur accélération dans le repère de Frenet que si un satellite a un mouvement uniforme, alors il a aussi un mouvement uniforme.

Voir activité 4

Établir la 3ème loi de Kepler à partir des lois de Newton dans le cas particulier du mouvement circulaire

CAPEXO 11. En utilisant la 2e loi de Newton et dans l'approximation d'un mouvement circulaire, montrer que la vitesse d'un satellite est constante et que son expression est $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ avec M la masse de l'astre attracteur et R le rayon de l'orbite, puis établir la 3ème loi de Kepler.

On démontre que le mouvement est uniforme car l'accélération est radiale centripète (car la force exercée est selon le vecteur unitaire normal) donc la coordonnée tangentielle est nulle, donc dv/dt = 0

Dans le cas d'un mouvement uniforme, $T = \frac{2\pi R}{v}$

donc $T^2 = 4\pi^2 R^2 \times \frac{R}{GM}$

on en déduit $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$: le rapport $\frac{T^2}{R^3}$ est bien indépendant de la masse du satellite.

Exprimer et calculer la période de révolution d'un satellite en mouvement circulaire uniforme, en fonction du rayon de l'orbite et de la masse de l'astre attracteur

CAPEXO 12. La station spatiale internationale est en orbite autour de la Terre à une altitude moyenne de 375km. Calculer sa période de rotation.

On donne le rayon de la Terre $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km, ainsi que la masse de la Terre $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$kg.

$$T = 2\pi (R_T+h)\sqrt{\frac{R_T+h}{6{,}67\times10^{-11}\times 5{,}98.10^{24}}} = 5{,}51\times10^3\,s \approx 92\ \text{min.}$$

CAPEXO 13. Eris est une planète nette en orbite elliptique autour du soleil avec une période de 557 années. Elle est quasiment de la même taille et plus massive que Pluton, dont la période de révolution vaut 248 ans et le demi-grand axe de sa trajectoire elliptique est 39,4 ua. Le demi-grand axe de la trajectoire d'Eris vaut 67,6 ua.

a. Sans calcul, indiquer si la période de révolution d'Eris est plus grand ou plus petite que celle de Pluton.
b. Calculer la période de révolution d'Eris.

Les deux planètes tournent autour du Soleil donc $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour les 2 planètes. a est plus grand pour Eris donc sa période est plus grande que celle de Pluton. $T = \sqrt{\left(\frac{a}{a'}\right)^3}\, T'$ AN : $T = \sqrt{\left(\frac{67,6}{39,4}\right)^3} \times 248 = 557$ ans

CAPEXO 14. Mars a deux satellite, Deimos et Phobos donc les orbites sont considérées circulaires. Le rayon de l'orbite de Deimos est r = 23460 km et sa période de révolution est T = 30h18min. Phobos a un rayon orbital r' = 9380km et une période de révolution T'. Calculer T'.

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3}$ d'après la 3e loi de Kepler donc $T' = \sqrt{\left(\frac{r'}{r}\right)^3}\, T$

AN : $T' = \sqrt{\left(\frac{9380}{23460}\right)^3} \times (30 \times 60 + 18)\text{min} = 460\text{min} \simeq 7\text{h}40\text{min}.$

CAPEXO 15. Reprendre le CAPEXO 1. Calculer la période de révolution de Hubble.
On donne le rayon de la Terre R_T=6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

$T = \frac{2\pi(R_T+h)}{v}$ AN : $T = 5,753 \times 10^3\,\text{s} = 95\,\text{min}\,53\,\text{s}.$

CAPEXO 16. Reprendre le CAPEXO 4. Calculer la période de révolution de Phobos.

$T = \frac{2\pi R}{v}$ AN : $T = 27,5 \times 10^3 \simeq 7\text{h}\,39\,\text{min}.$

CAPEXO 17. Reprendre le CAPEXO 8. Calculer la période du boulet de canon.
On donne le rayon de la Terre R_T=6,37 x 10^3 km, ainsi que la masse de la Terre M_T = 5,98 x 10^{24}kg.

$T = 2\pi\frac{(R_T+h)}{v}$ AN : $T = 5,513 \times 10^3\,\text{s} = 91\,\text{min}\,53\,\text{s}$

Exploiter la 3ème loi de Kepler pour déterminer la masse d'un astre en exploitant les propriétés (période de révolution, rayon orbital) de ses satellites

CAPEXO 18. Calculer la masse de la Terre en utilisant les propriétés suivantes de la Lune : période de révolution : 27 jours, distance moyenne au centre de la Terre : 364400 km.

$M_T = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$ AN : $M_T = \frac{4\pi^2}{6,67 \times 10^{-11}} \times \frac{(364,400 \times 10^6)^3}{(27 \times 24 \times 3600)^2}$

$M_T = 5,3 \times 10^{24}\,\text{kg}$

l'écart à la valeur connue vient de l'imprécision sur la période...

CAPEXO 19. Mars a deux satellite, Deimos et Phobos donc les orbites sont considérées circulaires. Le rayon de l'orbite de Deimos est r = 23460 km et sa période de révolution est T = 30h18min. Calculer la masse de Mars.

$M_T = \frac{4\pi^2}{G} \times \frac{r^3}{T^2}$ AN : $M_M = 6,42 \times 10^{23}\,\text{kg}$