Chapitre D4. Mouvements dans un champ de gravitation, lois de Kepler

*«Combien de détours ai-je du faire, sur combien de murailles ai-je dû tâtonner dans les ténèbres de mon ignorance avant de trouver la porte qui mène à la lumière du vrai …**Ainsi, ai-je rêvé de la vérité**.* » Johannes Kepler (1571-1630).

A partir des observations de Tycho Brahé (1546-1601), Kepler (1571-1630) a pu établir autour de 1610 des lois qui permettent de décrire et prévoir le mouvement des planètes du système solaire dans le référentiel héliocentrique (référentiel centré sur le soleil et dont les axes pointent 3 directions “ fixes ”). Ces lois modélisent plus généralement le mouvement de tout système en orbite, donc également les mouvements de satellites autour de la Terre. Ce sont donc des *lois empiriques*, qui ont été démontrées ultérieurement, grâce aux lois de Newton !

Pour traiter les différentes activités, vous disposez de différents documents donnés en annexe.

Activité 1 - Les planètes tournent autour du soleil… mais avec quelle trajectoire ?

1re loi de Kepler ……………………………………

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire du centre de chaque planète est une *ellipse* dont un des foyers est le centre du soleil

1. Montrer à l’aide des documents 1 et 2 (souligner les données utiles à la démonstration) que la trajectoire du centre de la Terre autour du Soleil est pratiquement un cercle dont le centre est le centre du Soleil.
2. Reformuler la 1ère loi de Kepler dans ce cas d'une trajectoire circulaire :

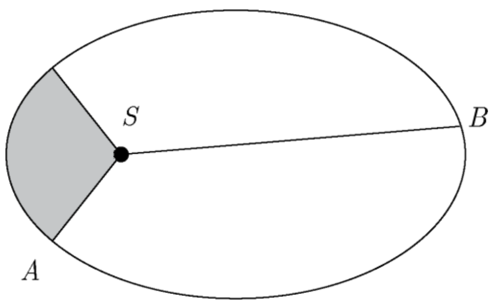
✂---✂

Activité 2 - des ellipses, mais à quelle vitesse ?

2e loi de Kepler ……………………………………

Le segment de droite reliant le centre du soleil au centre de chaque planète balaie des aires égales pendant des durées égales.

1. Exploiter les documents 3 et 4 pour prévoir en quelle année la comète de Halley sera observable depuis la Terre la prochaine fois.
2. À l’aide du document 5, montrer que la 2e loi de Kepler est vérifiée pour la comète en hachurant trois aires balayées <u>pendant deux ans</u> par le segment reliant le centre du Soleil au centre de la comète.
3. La figure ci-contre représente un astre en orbite elliptique autour du Soleil. On a représenté la portion d'aire balayée par le segment SA pendant une durée Δ*t*. En utilisant la deuxième loi de Kepler, représenter approximativement l'aire balayée par le segment SB pendant la même durée Δ*t* et en déduire la bonne proposition parmi les 3 proposées ci-dessous :
   - ☐ la vitesse est la même en A et en B
   - ☐ la vitesse est plus grande en A qu'en B
   - ☐ la vitesse est plus grande en B qu'en A



💻 *Vérification grâce à simulSAT disponible en ligne*

4. Dans le cas où la trajectoire est un cercle, le mouvement est ……………………………………

💻 *Vérification grâce à simulSAT*

Activité 3 – Vérification de la 3e loi de Kepler pour le système solaire et les satellites de Jupiter.

. . . .

Dès 1595, Kepler, jeune professeur de mathématiques du collège de Graz est persuadé qu'il y a un **lien entre le rayon moyen de l'orbite d'une planète du système solaire et sa vitesse sur son orbite**. Mais il lui faudra patience et persévérance pour trouver **empiriquement** une relation entre le rayon « R » de l'orbite moyenne d'une planète et sa période de révolution T. Cette relation (la « troisième loi de Kepler ») est publiée en 1618 dans un ouvrage intitulé ***Harmonices mundi*** grâce aux mesures les plus précises de Tycho Brahe.

Le 8 mars 1618, il a déjà écrit la loi correcte, mais l'a écartée, la croyant imprécise à cause d'une erreur de calcul. Toutefois, le 15 mai, l'idée se représente à lui et, finalement, ***« l'emporte sur les ténèbres de son esprit »****. Il a fallu « 22 ans d'attente » pour que Kepler détienne la clé de l'Harmonie céleste :*

« Enfin, il est certain et tout à fait exact que la proportion qui lie les temps périodiques de chaque couple de planètes est précisément la proportion sesquialtère des distances moyennes ».

La 3e loi de Kepler est souvent donnée sous cette forme :

$\frac{T^2}{a^3}$ = constante (où T désigne la période de révolution d'une planète autour du soleil et a le demi grand axe de sa trajectoire)

1ère partie : la 3e loi de Kepler et les planètes du système solaire

Le fichier Regressi kepler.rw3 dont vous disposez contient les données du document 1 (on a pris le rayon moyen des orbites).

1. Traiter ces données à l'aide de Regressi pour montrer qu'elles vérifient la 3e loi de Kepler.
2. Donner la valeur de la constante $\frac{T^2}{a^3}$ en $an^2 \cdot UA^{-3}$.

✋ ***Appeler le professeur quand vous pensez pouvoir avoir répondu.***

Activité 3 - 2ème partie : la 3e loi de Kepler et les satellites de Jupiter

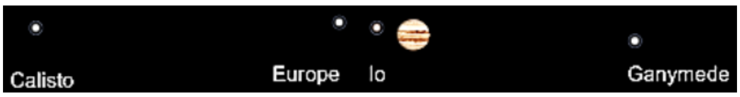
Galilée, le 7 janvier 1610, observe pour la première fois la planète Jupiter à l'aide d'une lunette astronomique. Il note dans son ouvrage « le mesager des étoiles » la position de trois « étoiles », apparemment proches de la planète. Voici son croquis (Ori. signifie Orient et Occ. signifie Occident) :

Ori. * * ○ * Occ.

Cependant le lendemain, Galilée note que les étoiles se sont déplacées ! Voici le croquis que Galilée réalise le lendemain :

Ori. ○ * * * Occ.

De jour en jour, Galilée observe que la position des « étoiles » varie périodiquement. Il en conclut qu'il ne s'agit pas d'étoiles mais des satellites de Jupiter. Galilée en identifie quatre :



Il parvient à déterminer les propriétés orbitales des satellites de Jupiter :

Satellite	*période*		*rayon de l'orbite*	
	en jours	*en année*	*en km*	*en UA*
Io	*1,8*	*0,0050*	*421 800*	*0,00281*
Europe	*3,6*	*0,0099*	*671 100*	*0,00447*
Ganymède	*7,3*	*0,020*	*1 070 400*	*0,0071*
Calisto	*16,9*	*0,047*	*1 882 700*	*0,0126*

1. Pour la planète qui vous a été attribuée, calculer le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ en $an^2 \cdot UA^{-3}$, avec 2 chiffres significatifs.
2. Comparer votre résultat à la valeur obtenue par trois autres groupes et vérifier que les satellites de Jupiter vérifient aussi la 3e loi de Kepler.
3. La constante $\frac{T^2}{a^3}$ est-elle la même pour les planètes autour du Soleil et pour les planètes autour de Jupiter ?

Activité 4 - Démonstration des lois de Kepler à l'aide de la 2^e loi de Newton dans le cas d'un mouvement circulaire

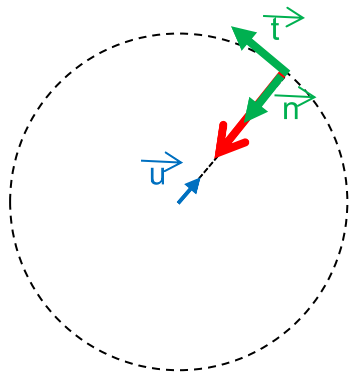
Le triomphe de Newton a été, grâce à sa 2^e loi et à la loi de la Gravitation Universelle, de pouvoir retrouver théoriquement les lois empiriques de Kepler.

On étudie une planète de centre P et de masse m, soumise à l'attraction gravitationnelle du Soleil dont la masse est notée M_S. P se trouve à une distance R du centre du soleil (noté S) et son vecteur vitesse est noté $\vec{v}$. On suppose que cette planète n'est soumise qu'à l'action du Soleil. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de S vers P.

1. Faire un schéma représentant la situation en utilisant les notations ci-dessus, et y représenter la force exercée par le Soleil sur la planète.
2. En appliquant la 2^e loi de Newton dans le référentiel héliocentrique, qu'on considèrera galiléen pour le mouvement de la planète, exprimer le vecteur accélération du centre de la planète, noté $\overrightarrow{a_P}$.
3. Représenter ce vecteur accélération.

- -

*On fait le **choix** à partir de maintenant d'étudier seulement les **mouvements circulaires**.*



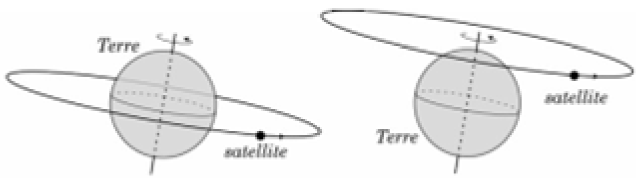
4. Tracer le vecteur accélération $\overrightarrow{a_P}$ sur le schéma ci-contre déduire de l'expression de ce vecteur dans le repère de Frenet que la vitesse est constante : on retrouve la 2^e loi de Kepler dans le cas de l'orbite circulaire.
5. Exprimer la norme de la force exercée par le Soleil sur la planète en fonction de *G*, *m*, M_S, *R*.
6. En utilisant la 2^e loi de Newton, établir l'expression de la norme de la vitesse.
7. Justifier alors l'affirmation suivante : *"Sur une même orbite, tous les satellites vont à la même vitesse"*.
8. La période T du satellite est la durée d'un tour complet à la vitesse v, donc $T = \frac{2\pi R}{v}$ où R est le rayon de l'orbite. Déduire de l'expression de la vitesse l'expression de la période en fonction de *R*, *G* et M_S puis montrer que cette expression est conforme à la 3^e loi de Kepler.

Pour aller plus loin : Exploiter les données de l'activité précédente pour en déduire, grâce à la 3^e loi de Kepler, la masse du Soleil ou celle de Jupiter puis vérifier la valeur en exploitant internet.

Donnée : Constante de gravitation universelle $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ uSI

Activité 5 - Cas des satellites géostationnaires autour de la Terre

Un satellite géostationnaire est un satellite terrestre restant en permanence à la verticale d'un même point de la surface de la Terre. Le centre de la trajectoire devant être le centre de la Terre, l'orbite est obligatoirement dans le plan équatorial (dans le cas contraire le centre de l'orbite serait sur l'axe de rotation de la Terre).



1. Quel est le mouvement d'un tel satellite dans un référentiel terrestre ?
2. Quelle doit être la valeur de la période de révolution du satellite ?
3. Dans le cas d'un satellite géostationnaire en mouvement circulaire uniforme, utiliser la 3^e loi de Kepler pour calculer l'altitude à laquelle il doit forcément se situer

💻 Vérifier à l'aide du simulateur ***simulaSAT*** grâce au menu "Orbite prédéfinie".

Données : *$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ uSI*
masse de la Terre : $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km.

Pour aller plus loin…

Calculer la valeur de la vitesse d'un tel satellite dans le référentiel géocentrique.

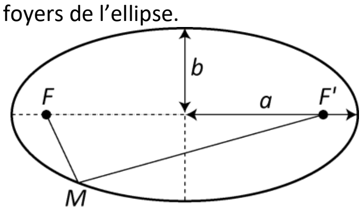
DOCUMENT 1 : les 8 planètes du système solaire

L'unité astronomique (UA) est la distance moyenne entre le centre de la Terre et le centre du Soleil 1 UA = 150x10^{6} km

Nom	Demi-grand axe (UA)	Demi petit axe (UA)	Période de révolution (années)	Période de rotation (jours)
Mercure	0,39	0,34	0,24	58,64
Vénus	0,72	0,72	0,62	-243,02
Terre	1,00	0,99	1,00	1,00
Mars	1,52	1,45	1,88	1,03
Jupiter	5,20	5,08	11,86	0,41
Saturne	9,54	9,28	29,46	0,43
Uranus	19,23	18,77	84,01	-0,72
Neptune	30,07	29,93	164,8	0,67

DOCUMENT 2 : les ellipses

Une ellipse est la figure géométrique formée par l'ensemble des points *M* tels que *FM+F'M=constante (=2a)*.
F et *F'* sont les foyers de l'ellipse.



Une ellipse est caractérisée par deux distances particulières :

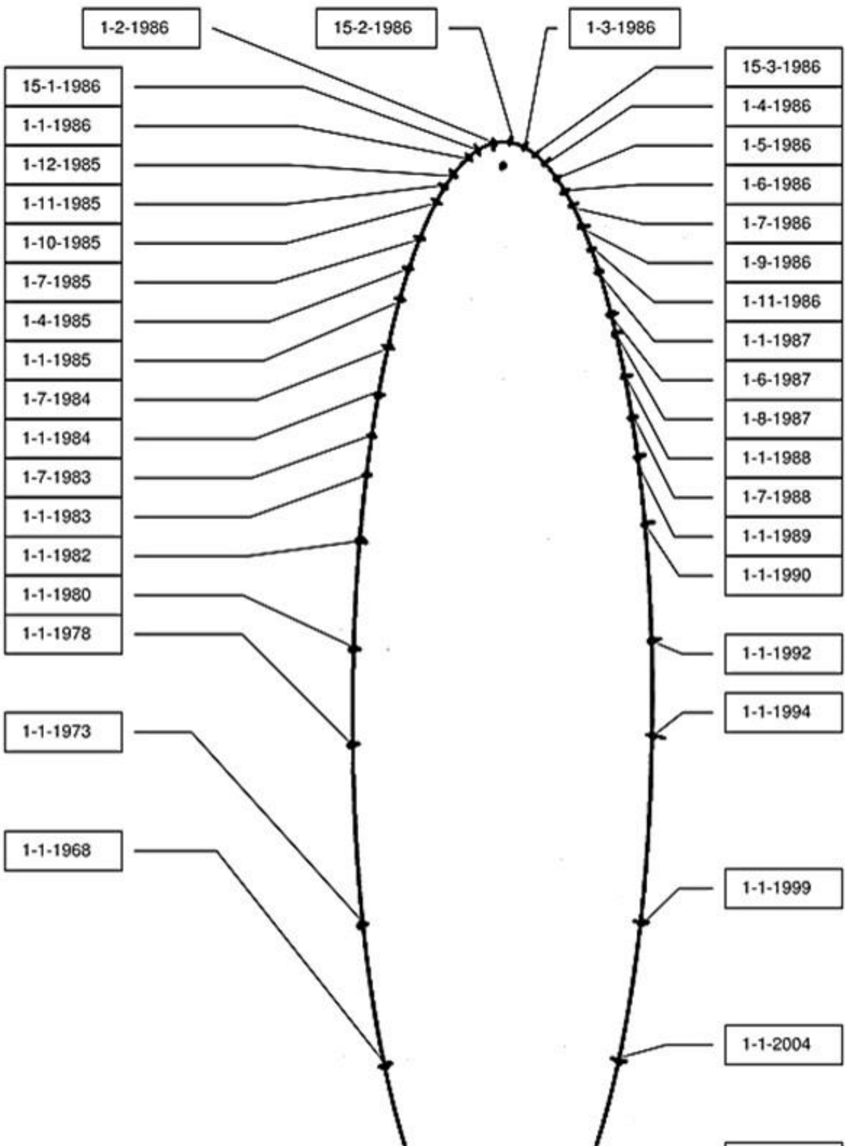
- son demi grand axe *a*
- son demi petit axe *b*

Le cercle est une ellipse particulière telle que *F* et *F'* sont confondus au centre du cercle. On a alors *a* = *b* = rayon du cercle.

Voir aussi l'extrait, disponible sur www.prof-vince.fr, du film *AGORA* inspiré d'événements réels de la vie d'Hypatie d'Alexandrie.

DOCUMENT 5 : Trajectoire de la comète de Halley

Différentes positions et trajectoire de la comète de Halley (dates encadrées)



-Périhélie : **0,59 u.a.**
-Aphélie : **35 u.a.**
-Période de révolution :
T = 76,1 ans
-Diamètre du noyau : ≈ **10 km**

DOCUMENT 3 : les comètes

Une comète est, en astronomie, un petit corps du Système solaire constitué d'un noyau de glace et de poussière. Lorsque son orbite, qui a généralement la forme d'une ellipse très allongée, l'amène près du Soleil, elle s'entoure d'une sorte de fine atmosphère brillante constituée de gaz et de particules, appelée chevelure ou coma, souvent prolongée d'une traînée lumineuse composée de gaz et de poussière, la queue, qui peut s'étendre sur 30 à 80 millions de kilomètres.

source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Comète

DOCUMENT 4 : la comète de Halley

Selon des annales chinoises, les premières observations de la comète de Halley datent d'au moins 240 av. J.C Halley ayant déterminé les orbites des 24 comètes les plus brillantes, a observé que les orbites des comètes de 1531, 1607 et 1682 se ressemblaient : il en a tiré la conclusion qu'il s'agit de la même comète. Il a alors prédit le retour de cette comète pour 1758. La comète fut au rendez-vous en décembre 1758 !

Edmund Halley (1656 – 1743)