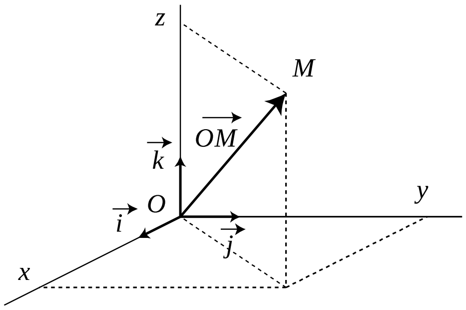
Chapitre D1. Décrire un mouvement : cinématique

A- Notion de « système »

En mécanique, le système est *l'objet*, *l'ensemble d'objets* ou *la partie d'un objet* que l'on choisit d'étudier. Le système doit toujours être défini précisément.
On s'intéresse cette année à la **mécanique du point**, ce qui signifie qu'on étudiera le mouvement d'un point unique du système. Il est souvent intéressant d'étudier le mouvement du centre d'inertie. Dans ce cas, on représente l'objet par ce point auquel on peut attribuer la masse de l'objet. Ce choix d'un point est toujours à faire en premier et s'accompagne généralement d'une perte d'information sur le mouvement du système.

B- Repérer une position



En coordonnées cartésiennes
Pour repérer la position d'un point M au cours du temps, le référentiel (à partir duquel on décrit le mouvement) est muni d'un repère d'espace $(O;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k})$.
La position de M est donnée par **le vecteur position** :

$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{array}}$$

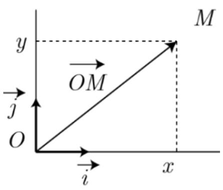
x, y et z sont **les coordonnées** du point M.

Attention : les coordonnées du vecteur position sont des distances et donc exprimées en mètres.

Les vecteurs unitaires sont parfois notés $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$.

Dans le cas courant d'un mouvement plan, on ne garde que deux coordonnées :

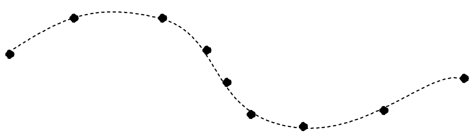
$$\boxed{\begin{array}{c}\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\end{array}}$$



C- Vecteur vitesse d'un point

En physique, la vitesse d'un point appartenant au système étudié est représentée par un vecteur possédant les caractéristiques suivantes :

- direction : . . . .
- sens : . . . .
- norme : . . . .



C1. Vecteur vitesse moyenne

On étudie un point M dont la position est notée $M_1 = M(t)$ à la date t et $M_2 = M(t + \Delta t)$ à une date ultérieure $t + \Delta t$. La vitesse moyenne pendant la durée Δt vaut : $\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$

On souhaite exprimer $\overrightarrow{v_{moy}}$ en fonction des vecteurs-position : $\overrightarrow{v_{moy}} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}$

C2. Vecteur vitesse instantanée

Le vecteur vitesse moyenne est d'autant plus proche du vecteur vitesse instantanée de M à la date t que Δt est faible. Le vecteur vitesse instantanée vaut donc : $\overrightarrow{v(t)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}$

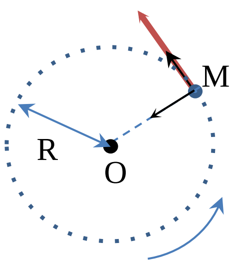
Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

Les coordonnées du vecteur vitesse sont les dérivées de celles du vecteur position : $\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$; $\overrightarrow{v\ \ (t)}\begin{pmatrix}v_x = \frac{dx}{dt}\\ v_y = \frac{dy}{dt}\\ v_z = \frac{dz}{dt}\end{pmatrix}$

C3. Vecteur vitesse dans le repère de Frenet pour un point en mouvement circulaire

Dans le cas d'un point M en mouvement circulaire décrivant une trajectoire de centre O et de rayon R, le vecteur vitesse étant tangent à la trajectoire au point M il est commode d'exprimer le vecteur vitesse dans le repère de Frenet défini de la façon suivante :

- l'origine du repère est le point en mouvement ;
- l'un des vecteurs unitaires du repère est le vecteur tangent à la trajectoire $\overrightarrow{u_T}$ dirigé dans le sens du mouvement ;
- l'autre vecteur unitaire est le vecteur normal dirigé vers le centre de la trajectoire $\overrightarrow{u_N}$.



Dans ce repère, le vecteur vitesse s'exprime $\vec{v}(t) = v(t)\,\overrightarrow{u_T}$, où $v(t)$ est la norme de la vitesse.

D- Vecteur accélération d'un point

D1. Vecteur accélération d'un point en coordonnées cartésiennes

Dans un référentiel donné, le vecteur accélération moyenne entre les instants t et t + Δt est donné par :

$$\overrightarrow{a_{moy}(t)} = \frac{\overrightarrow{v(t+\Delta t)} - \overrightarrow{v(t)}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1}$$

Le vecteur accélération instantanée $\vec{a}$ d'un point est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse de ce point.

$$\overrightarrow{a(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v(t+\Delta t)} - \overrightarrow{v(t)}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a(t)} \begin{pmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}}$$

Unité de la norme de l'accélération : $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

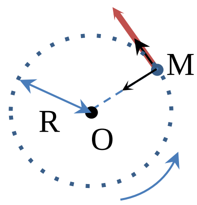
Un point a une accélération non nulle quand
- **la valeur de la vitesse varie**

ou
- **lorsque la direction change.**

D2. Vecteur accélération dans le repère de Frenet pour un point en mouvement circulaire

Dans le cas d'un point M en mouvement circulaire décrivant une trajectoire, le vecteur accélération s'exprime de la façon suivante :

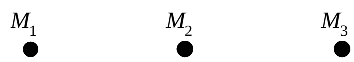
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}$$



D3. Vecteurs vitesse et accélération de mouvements particuliers

1- Le mouvement rectiligne uniforme

Le vecteur vitesse est constant
le vecteur accélération est donc nul.



2- Le mouvement rectiligne dit *accéléré*

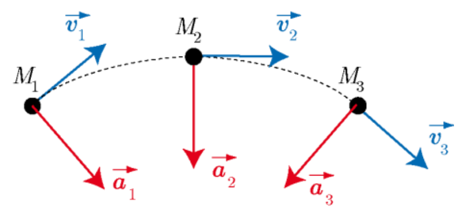
La direction et le sens du vecteur vitesse sont constants
mais sa valeur augmente
Le vecteur accélération est donc :
▷ de même direction que le vecteur vitesse
▷ de même sens que le vecteur vitesse

3- Le mouvement rectiligne dit *décéléré*

La direction et le sens du vecteur vitesse sont constants
mais sa valeur diminue
Le vecteur accélération est donc :
▷ de même direction que le vecteur vitesse
▷ de sens opposé au vecteur vitesse

4- Le mouvement circulaire uniforme

La valeur de la vitesse est constante
mais la direction du vecteur vitesse change
Le vecteur accélération est :
▷ de direction perpendiculaire à celle du vecteur vitesse ;
▷ dirigée vers le centre de la trajectoire ;
▷ de valeur : $a = \frac{v^2}{R}$; v étant la vitesse du point étudié et R le rayon de la trajectoire.



Réciproquement : si un mouvement est tel que, à chaque instant, le vecteur accélération est perpendiculaire au vecteur vitesse, alors le mouvement est circulaire uniforme.