DM n° 3. Correction.

Exercice 1

1) $S = 6 \times a^2 = 5{,}4 \times 10^{-3}\ m^2$

2) $V = a^3 = 27 \times 10^{-6}\ m^3$

3) Il faut choisir une grande capacité thermique.

4) $dU = mc\, d\theta = \phi\, dt$

5) donc $mc \dfrac{d\theta}{dt} = -hS(\theta - \theta_{th})$ ($\dfrac{d\theta}{dt} < 0$ car θ diminue et $\theta > \theta_{th}$)

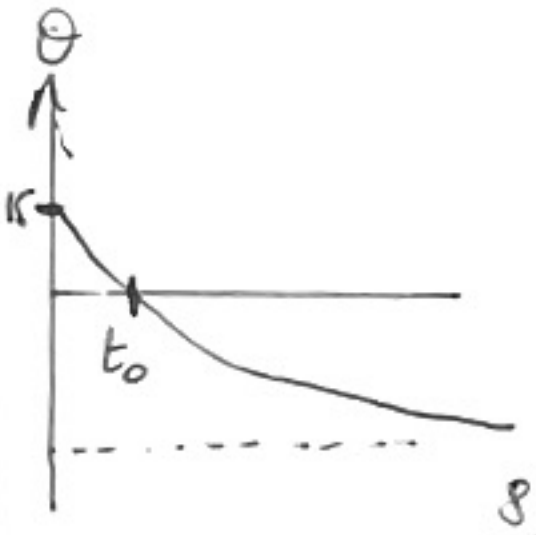
donc

$$mc\frac{d\theta}{dt} + hS\theta = hS\theta_{th}$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{hS}{mc}\theta = \frac{hS}{mc}\theta_{th}$$: on obtient l'équation différentielle demandée avec $\tau = \dfrac{mc}{hS}$

6) $\theta(t)$ solution et $\theta(0) = \theta_0$ donc $\theta_{th} + A = \theta_0$ donc $A = \theta_0 - \theta_{th}$

7) on cherche t_0 tel que $\theta(t_0) = 0°C$



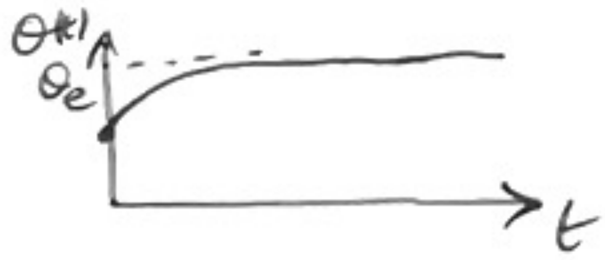
donc $\theta_{th} + (\theta_0 - \theta_{th})\, e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0$ soit $e^{-\frac{t_0}{\tau}} = \dfrac{-\theta_{th}}{\theta_0 - \theta_{th}}$

$$\frac{t_0}{\tau} = \ln\left(\frac{\theta_0 - \theta_{th}}{-\theta_{th}}\right)$$ (car $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$)

donc $t_0 = \tau \ln \dfrac{40}{25}$ or $\tau = \dfrac{mc}{hS} = 1043\,s$ donc $t_0 = 490\,s$ soit 8 min 10 s.

8) Si c augmente, τ augmente donc t_0 également (vérification de la question 3)).

Exercice 2



1) $Q = hS(\theta_e - \theta)\Delta t$

2) $Q = mc(\theta(t+\Delta t) - \theta(t)) = mc\,\Delta\theta$

3) passage à la limite : $mc\,d\theta = hS(\theta_e - \theta)dt$

donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{hS}{mc}(\theta_e - \theta)$

soit encore $\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{hS}{mc}\theta = \dfrac{hS}{mc}\theta_e$

4) on vérifie en dérivant que $\dfrac{d\theta}{dt} = a(\theta_i - \theta_e)e^{at}$

et donc que $a(\theta_i - \theta_e)\,e^{at} + \underbrace{\dfrac{hS}{mc}(\theta_i - \theta_e)e^{at} + \dfrac{hS}{mc}\theta_e}_{\frac{hS}{mc}\theta}$

$= \dfrac{hS}{mc}\theta_e$ à condition que $a = -\dfrac{hS}{mc}$

5) on cherche t_{30} tel que $\theta(t_{30}) = 30°$.

$\theta(t_{30}) = (\theta_i - \theta_e)e^{at_{30}} + \theta_e$ donc $e^{at_{30}} = \dfrac{\theta(t_{30}) - \theta_e}{\theta_i - \theta_e}$

donc $t_{30} = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{\theta(t_{30}) - \theta_e}{\theta_i - \theta_e} = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{30-50}{5-50} = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{20}{45}$. Or $a = -5{,}5 \times 10^{-3}$ uSI donc $t_{30} = 147\,s = 2\,min\,27\,s$.

C'est bien moins de 3 minutes !